幾何的情報からの組合せ論的変異によるグラスマン多様体のトーリック退化の構成

大坂大学　大学院情報科学研究科　情報基礎数学専攻
小脇 修和 (Nobukazu Kowaki) *

概要

マッチングフィールド多面体の組み合わせ論的変異の列はそのマッチングフィールドがグラスマン多様体のトーリック退化を生じるかという性質を保存する。この講演では、トロピカル超平面配置を用いて二つのマッチングフィールド多面体が組み合わせ論的変異同値かどうかを調べる十分条件を述べる。この系として、ブロックダイアゴナルマッチングフィールドはダイアゴナルマッチングフィールドに組合せ論的変異同値であることを示す。これは Clarke-Higashitani-Mohammadi[2] の結果の別証明となっている。

1　導入

グラスマン多様体のトーリック退化は様々な手法で研究されている分野の一つである。私は SAGBI 基底を用いた手法でのトーリック退化を研究している。

定義 1 (SAGBI 基底)**.** 多項式環における多項式の集合 $\{f_1, \cdots f_r\}$ が与えられた項順序 $<$ で **SAGBI 基底**であるとは、任意の多項式 $f \in \mathbb{K}[f_1, \cdots, f_r]$ に対し、$\mathrm{in}_< f$ が $\mathrm{in}_< f_1, \cdots, \mathrm{in}_< f_r$ の積で書けるということである。

順序の導入にマッチングフィールドというものを導入する。これは $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$、$\mathbf{I}_{k,n} = \{I \subset [n] : |I| = k\}$、$S_k$ を対称群として、$\Lambda : \mathbf{I}_{k,n} \to S_k$ で定義される写像である。マッチングフィールドは I に対応する変数行列 X_I の行列式の項を一つ選ぶものである。行列で誘導されるマッチングフィールドをコヒーレントマッチングフィールドという。

Plücker 座標がマッチングフィールドから誘導される順序で Plücker 代数の SAGBI 基底となっているなら、そのマッチングフィールドにより**グラスマン多様体のトーリック退化**が行えるという [4]。

以下がこの分野の究極の目的である。

目標. 全てのコヒーレントマッチングフィールドでトーリック退化の可否を判定する。

その解決のために**既知のマッチングフィールドの結果から別のマッチングフィールドのトーリック退化の判定を行う**方法が欲しい。

* E-mail:u793177f@ecs.osaka-u.ac.jp

2　準備

2.1　グラスマン多様体とその斉次座標環

ここではグラスマン多様体について基本的なことを説明する。

定義 2 (グラスマン多様体)**.** **グラスマン多様体** $\mathrm{Gr}(d,n)$ とは、n 次元ベクトル空間の d 次元部分空間を集めたものである。

以降、以下の記法を用いる。

- $\mathrm{Gr}(k,n)$: グラスマン多様体
- $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$、$\mathbf{I}_{k,n}=\{I\subset[n]:|I|=k\}$
- X: $k\times n$ 変数行列、X_I: X から I に対応する列で作る $k\times k$ 変数行列
- S_k: 対称群

グラスマン多様体の斉次座標環を与えるために以下の写像を定義する。

定義 3 (プリュッカー埋め込み)**.**

$$\begin{aligned}\varphi:\mathbb{K}[P_I:I\in\mathbf{I}_{k,n}]&\to\mathbb{K}[x_{ij}:1\leq i\leq k,1\leq j\leq n]\\ P_I&\mapsto \det X_I\end{aligned}$$

これによる座標はグラスマン多様体の点と 1 対 1 に対応している。この写像の核を求めて、グラスマン多様体の斉次座標環であるプリュッカー代数を構成する。

定義 4 (プリュッカーイデアル)**.** プリュッカー埋め込みのカーネルを**プリュッカーイデアル**と呼ぶ。

定義 5 (プリュッカー座標)**.** $I\in\mathbf{I}_{k,n}$ とし、$\det X_I$ を X の**プリュッカー座標**と呼ぶ。これは対応するプリュッカー変数 P_I と同一視される。

定義 6 (プリュッカー代数)**.** $\mathcal{I}$ をプリュッカーイデアルとする。$\mathbb{K}[P_I:I\in\mathbf{I}_{k,n}]/\mathcal{I}$ を**プリュッカー代数**と呼ぶ。

2.2　マッチングフィールド

ここではマッチングフィールドの正確な定義を与える。

定義 7 (マッチングフィールド)**.** 写像 $\Lambda:\mathbf{I}_{k,n}\to S_k$ を**マッチングフィールド**と呼ぶ。

注意 1. マッチングフィールドは、X_I の行列式の項を一つ選ぶ操作である。 つまり、$I=\{i_1,\cdots,i_k\}$ のとき $\det X_I=\sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma)x_{1i_{\sigma(1)}}\cdots x_{ki_{\sigma(k)}}$ の中で $\sigma=\Lambda(I)$ の項を選ぶ操作である。

行列 $M=(m_{ij})$ とし、m_{ij} を変数行列の対応する変数の重みとする。$I=\{i_1,\cdots,i_k\}$ に対し、

$\mathrm{in}_M(\det X_I) = x_{1i_{\sigma(1)}} \cdots x_{ki_{\sigma(k)}}$ とする。 ただし、$\det X_I$ の項の中で M による重みが最小となる項が先頭項である。$I \mapsto \sigma$ で作られる写像をこの**行列から誘導される**マッチングフィールドと呼ぶ。

定義 8 (コヒーレントマッチングフィールド)**.** マッチングフィールドが行列から誘導されるなら、それは**コヒーレントマッチングフィールド**であるという。

定義 9 (ダイアゴナルマッチングフィールド)**.** 全ての $\mathbf{I}_{k,n}$ の元を id に送るマッチングフィールドを**ダイアゴナルマッチングフィールド**という。

ブロックダイアゴナルマッチングフィールドには様々な拡張された定義が存在するが、ここでは Mohammadi-Shaw の定義に従う。

定義 10 (ブロックダイアゴナルマッチングフィールド)**.**

$$\mathcal{B}_\ell(I) := \begin{cases} \mathrm{id} & |I \cap [\ell]| \neq 1, \\ (12) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

となるマッチングフィールドを**ブロックダイアゴナルマッチングフィールド**と呼ぶ。

ダイアゴナルマッチングフィールドとブロックダイアゴナルマッチングフィールドはともにコヒーレントマッチングフィールドであることを知られている。

マッチングフィールド多面体の定義のために記法をいくつか定めておく。

- $\mathbb{R}^{k\times n}$: $k \times n$ 行列のベクトル空間
- $e_{i,j}$: (i,j) 成分のみ 1、残りすべて 0 となる標準的な基底行列
- Λ: マッチングフィールド, $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \in \mathbf{I}_{k,n}$
- $v_{I,\Lambda} := \sum_{j=1}^{k} e_{j,i_{\Lambda(I)(j)}}$

定義 11 (マッチングフィールド多面体)**.** $P_\Lambda = \mathrm{Conv}\{v_{I,\Lambda} : I \in \mathbf{I}_{k,n}\}$.

2.3 SAGBI 基底

SAGBI は Subalgebra Analogue to Gröbner Bases for Ideals の略である。

定義 12 (SAGBI 基底)**.** 多項式環における多項式の集合 $\{f_1, \cdots f_r\}$ が与えられた項順序 $<$ で **SAGBI 基底**であるとは、任意の多項式 $f \in \mathbb{K}[f_1, \cdots, f_r]$ に対し、$\mathrm{in}_< f$ が $\mathrm{in}_< f_1, \cdots, \mathrm{in}_< f_r$ の積で書けるということである。

注意 2. プリュッカー座標がコヒーレントマッチングフィールドで誘導される項順序でプリュッカー代数の SAGBI 基底になっていれば、グラスマン多様体のトーリック退化が得られる。

2.4 トロピカル幾何

M=(m_{ij}) をマッチングフィールドを誘導する行列とする。これにより、トロピカル多項式 $F_j((x_2, \cdots, x_k)) := \max\{m_{1j}, m_{2j} + x_2, \cdots, m_{kj} + x_k\}$ を考え、F_j のトロピカル曲線 H_j を F_j が

max を 2 回以上とる点の集合として定義する。$\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$ を $F_1, \cdots, F_n$ で定義されるトロピカル超平面配置として定める。これにより、コヒーレントマッチングフィールドに対応するトロピカル超平面配置を定義できる。

Λ をコヒーレントマッチングフィールドとし、M をマッチングフィールド Λ を誘導する行列、$I = \{i_1, \cdots, i_k\}$ with $i_1 < \cdots < i_k$ を定め、$\{H_i\}_{i\in I}$ を対応するトロピカル超平面の族、$(\{c_1\}, \cdots, \{c_k\})$ をコースコベクトルのすべての成分が 1 となるような I に対するただ一つのコベクトルとする。

このとき、以下の命題により、トロピカル超平面配置からマッチングフィールドを復元できる。

命題 1 (Mohammadi and Shaw [5]).

$$\mathrm{in}_M(\det(X_I)) = x_{1c_1}x_{2c_2}\ldots x_{kc_k}$$

2.5 組合せ論的変異

組合せ論的変異の定義のために記法をいくつか固定する。

- $N = \mathbb{Z}^d$, $M = Hom_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$
- $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$
- 内積 $N_{\mathbb{R}} \times M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $(v, u) \mapsto u(v)$
- w: M の原始的な格子点
- F: $F \subset w^{\perp} \subset N_{\mathbb{R}}$ を満たす格子多面体 ($w^{\perp}$ は w の直交空間)
- $\varphi_{w,F}$: $M_{\mathbb{R}} \to M_{\mathbb{R}}$, $u \mapsto u - u_{\min}w \quad (u_{\min} = \min\{u(p) : p \in F\})$

定義 13 (組合せ論的変異 (Akhtar-Coates-Galkin-Kasprzyk, 2012 [1])). $P \subset M_{\mathbb{R}}$ を格子多面体とし、$\varphi_{w,F}(P)$ が凸であるとする。この時多面体 $\varphi_{w,F}(P)$ は P の**組合せ論的変異**という。

3 主定理

$\mathrm{Gr}(3, n)$ で、Λ をトーリック退化可能なマッチングフィールド、Λ' を隣接する 2 本のトロピカルライン i, j を入れ替えたことを除いて対応するトロピカル配置が Λ と同じとなるマッチングフィールドとする。i, j に対して下図のように領域の色分けを行い、青とオリーブ色の領域にトロピカルラインの中心点が全く入っていない場合を考える

定理 1 (K.). 上の条件が満たされているなら、2 つのマッチングフィールド多面体 $P_{\Lambda}, P_{\Lambda'}$ は**組合せ論的変異**により同値となっている。

定理 2 (K.). このとき、Λ' もトーリック退化可能である。

さらなる詳細は [3] を参照してほしい。

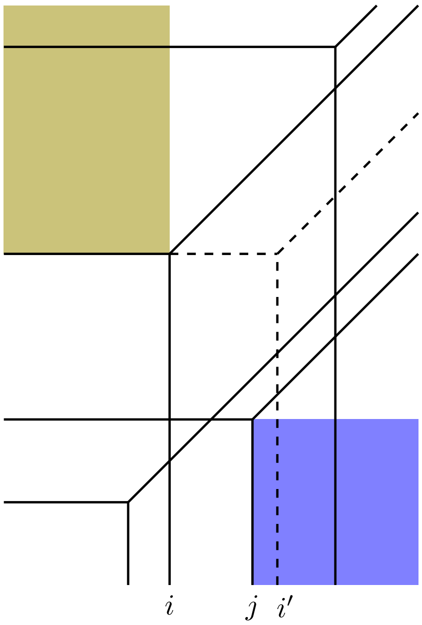

図 1　領域の色分け

参考文献

[1] M. Akhtar, T. Coates, S. Galkin, and A. M. Kasprzyk, Minkowski polynomials and mutations, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2012.

[2] O. Clarke, A. Higashitani, and F. Mohammadi, Combinatorial mutations and block diagonal polytopes, Collectanea Mathematica, 2021.

[3] N. Kowaki, Tropical hyperplane arrangements and combinatorial mutations of the matching field polytopes of Grassmannians, arXiv:2405.15215.

[4] E. Miller, and B. Sturmfels, Combinatorial commutative algebra, Springer Science & Business Media, 2005.

[5] F. Mohammadi, and K. Shaw, Toric degenerations of Grassmannians from matching fields, Algebraic Combinatorics, 2019.